



Morphisme unitaire d'anneaux

Par Mathtous

Le plus souvent, on appelle « anneau » ce que l'on qualifiait jadis d'« anneau unitaire ».

En bref, lorsque de nos jours on parle d'anneau, il est sous-entendu que cet anneau possède un élément neutre pour la multiplication, noté traditionnellement 1.

Moins souvent, il est parfois supposé qu'un morphisme (d'anneaux) envoie l'unité du premier sur celle du second. Ce qui n'est nullement obligatoire.

Là encore, il s'agit d'une convention concernant ce que l'on entend par « morphisme ».

Dans cet article, je me restreindrai donc aux propriétés minimales d'un morphisme :

Etant donné deux anneaux A et B , je dirai que φ est un morphisme de A dans B si :

$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tout élément a et tout élément b de A ;

$\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ pour tout élément a et tout élément b de A .

On exclura tout de même le cas où φ serait le « morphisme nul » (envoyant tout sur 0), ce qui exclut que A et B soient réduits à $\{0\}$. D'ailleurs, ils le vérifient si dans chacun d'eux $1 \neq 0$.

Dans ces conditions, il est clair que $\varphi(0_A) = 0_B$.

Par contre, rien ne permet de dire si $\varphi(1_A) = 1_B$.

On se place donc dans les conditions suivantes :

A et B sont deux anneaux unitaires non réduits à $\{0\}$. ($1 \neq 0$).

φ est un morphisme non nul de A dans B .

1) Il n'y a aucune raison que $\varphi(1_A) = 1_B$.

En effet, considérons les exemples suivants :

a) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (muni des opérations « produits »).

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$

$$x \longmapsto \varphi(x) = (x, 0)$$

φ est de toute évidence un morphisme. Mais $\varphi(1) = (1, 0)$ qui n'est pas l'élément unitaire de B (ce dernier est $(1, 1)$).

b) $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$\varphi : A \longrightarrow B$ défini par :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(1) = 3$$

φ est bien un morphisme, mais $\varphi(1) \neq 1$.

2) On peut trouver une condition *suffisante* pour que $\varphi(1_A) = 1_B$.

φ n'étant pas le morphisme nul, il existe donc $a \in A$ tel que $\varphi(a) \neq 0_B$.

On a alors : $\varphi(a) = \varphi(1_A.a) = \varphi(1_A).\varphi(a)$

Si $\varphi(a)$ n'est pas un diviseur de 0_B , ce qui se produit si B est intègre, alors l'égalité se simplifie et on obtient $\varphi(1_A) = 1_B$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème :

Si φ est un morphisme non nul d'un anneau unitaire A vers un anneau *intègre* B , alors $\varphi(1_A) = 1_B$.

3) Cette condition n'est nullement nécessaire. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir pour φ l'identité d'un anneau non intègre dans lui-même : on aura nécessairement $\varphi(1) = 1$.

Mais on n'est pas obligé de prendre un cas aussi particulier. Modifions légèrement l'exemple 1)a) :

$A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (muni des opérations « produits »).

$\varphi : A \longrightarrow B$

$$x \longmapsto \varphi(x) = (x, 1)$$

On a cette fois $\varphi(1) = (1, 1)$ qui est l'élément unitaire de B .